PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

SEPTIEMBRE - 2000

(RESUELTOS)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada dos de las cuatro opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene al dividir el total de puntos entre cuatro.

OPCIÓN A

1º) Determinar los puntos de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$ que equidisten de los planos $\pi_1 \equiv 3x+4y=1$ y $\pi_2 \equiv 4x-3y=1$.

A expresión en unas ecuaciones paramétricas de la recta es: $r \equiv \begin{cases} x = 1+2k \\ y = -1+3k \\ z = -2+2k \end{cases}$.

Un punto genérico de r es: $P(1+2k,\ -1+3k,\ -2+2k)$.

$$d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2) \Rightarrow \frac{|3(1+2k)+4(-1+3k)-1|}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} = \frac{|4(1+2k)-3(-1+3k)-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+0^2}} \;;;$$

$$\frac{|3+6k-4+12k-1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|4+8k+3-9k-1|}{\sqrt{16+9}} \;;;\; |18k-2| = |-k+6| \Rightarrow \begin{cases} 18k-2 = -k+6 \\ 18k-2 = k-6 \end{cases} \;;;$$

$$19k = 8 \rightarrow \underline{k_1 = \frac{8}{19}} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= 1+2k = 1+\frac{16}{19} = \frac{35}{19} \\ y &= -1+3k = -1+\frac{24}{19} = \frac{5}{19} \\ z &= -2+2k = -2+\frac{16}{19} = -\frac{22}{19} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{P_1\left(\frac{35}{19}, \frac{5}{19}, -\frac{22}{19}\right)}}$$

$$17k = -4 \rightarrow \underline{k_2 = -\frac{4}{17}} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= 1+2k = 1-\frac{8}{17} = \frac{9}{17} \\ y &= -1+3k = -1-\frac{12}{17} = -\frac{29}{17} \\ z &= -2+2k = -2-\frac{8}{17} = -\frac{42}{17} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{P_2\left(\frac{9}{17}, -\frac{29}{17}, -\frac{42}{17}\right)}}$$

****

2º) Se considera la función $f(x)=2x^3-6x^2+4$. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva representativa de esta función en su punto de inflexión. Hacer también una gráfica aproximada de la función en un entorno de ese punto.

En primer lugar determinamos el punto de inflexión:

$$f'(x)=6x^2-12x\ ;;\ f''(x)=12x-12\ ;;\ f'''(x)=12\neq 0\ \Rightarrow\ (Existe\ \ punto\ \ de\ \ \inf lexión).$$

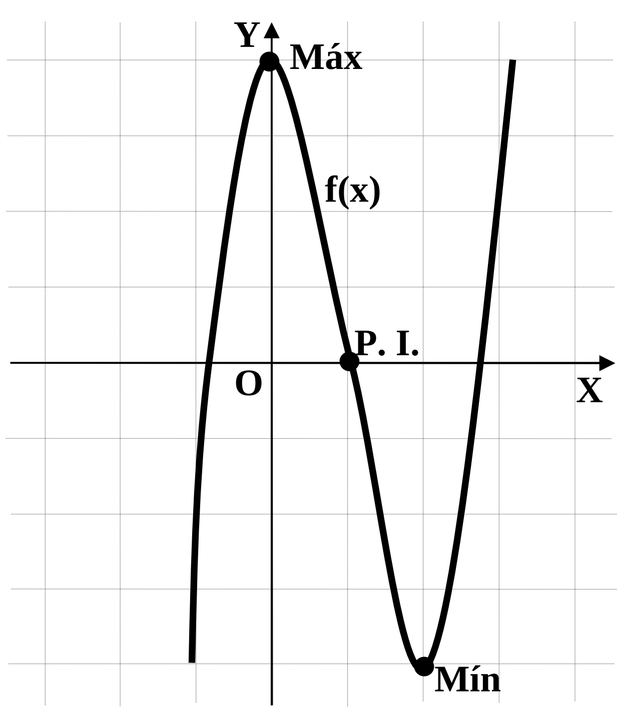
$$f''(x)=0\Rightarrow 12x-12=12(x-1)=0\Rightarrow \underline{x=1}\ ;;\ f(1)=2-6+4=0\ \Rightarrow\ \underline{P.\ I.(1,\ 0)}$$

$$m=f'(1)=12-12=\underline{0=m}.\ \ \text{Re}cta\ \ punto-pendiente:\ y-y_0=m(x-x_0).$$

$$\text{Re}cta\ \ \tan gente\ \Rightarrow \left\{\begin{matrix} P.\ I.(1,\ 0) \\ m=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\ y-0=0(x-1)\ ;;\ \underline{\underline{y=0}}\ \ (Eje\ \ X)$$

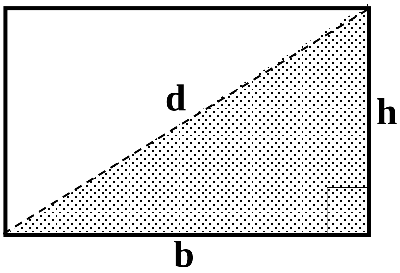
Para representar la función tendremos en cuenta que es polinómica; que tiene un máximo y un mínimo relativos que determinamos:

$$f'(x)=0\Rightarrow 6x(x-2)=0\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1=0\rightarrow f''(0)=-12<0\Rightarrow \underline{Máx(0,\ 4)} \\ f(0)=4\ \rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \uparrow \\ \\ x_2=2\rightarrow f''(2)=24-12>0\Rightarrow \underline{Mín(2,\ -4)} \\ f(2)=16-24+4=-4\ \rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \uparrow \end{matrix}\right\}$$



****

3º) Entre todos los rectángulos de área 3 metros cuadrados, hallar las dimensiones del que tenga mínimo el producto de sus diagonales.



El área del rectángulo es: $S = b \cdot h = 3\ m^2$;;

$$b = \frac{3}{h}$$

$$P = d \cdot d = d^2 = b^2 + h^2 = \left(\frac{3}{h}\right)^2 + h^2 = \frac{9}{h^2} + h^2 =$$

$$= \frac{9 + h^4}{h^2} = P \;\;;;\;\; P' = \frac{4h^3 \cdot h^2 - \left(9 + h^4\right) \cdot 2h}{h^4} = \frac{4h^4 - 2\left(9 + h^4\right)}{h^3} = \frac{4h^4 - 18 - 2h^4}{h^3} = \frac{2h^4 - 18}{h^3}$$

$$P' = 0 \Rightarrow 2h^4 - 18 = 2\left(h^4 - 9\right) = 0 \;\;;;\;\; h^4 = 9 \;\;;;\;\; h^2 = 3 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{h = \sqrt{3}}}$$

$$b = \frac{3}{h} \;\Rightarrow\; b = \frac{3}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\sqrt{3} = b = a}}$$

<u>*El rectángulo pedido es un cuadrado de lado $\sqrt{3}$ metros*</u>

****

4º) Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro k: $\left.\begin{array}{r} x-y+z=2 \\ x+ky+z=8 \\ kx+y+kz=10 \end{array}\right\}$.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & k \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 & 8 \\ k & 1 & k & 10 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & k \end{vmatrix}=0 \rightarrow \{C_1=C_3\} \Rightarrow \underline{|M|=0,\ \forall k \in R} \quad \Rightarrow \underline{Rango\ de\ \ M=2}$$

Para determinar el rango de M' estudiamos el determinante formado por las tres columnas diferentes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & k & 8 \\ k & 1 & 10 \end{vmatrix}=10k+2-8k-2k^2-8+10=-2k^2+2k+4=0 \;;;\; k^2-k-2=0$$

$$k=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{k_1=2} \\ \underline{k_2=-1} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l} k\neq 2 \\ k\neq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow\ Rango\ M \neq Rango\ M' \ \Rightarrow\ Incompatible}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l} k=2 \\ k=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow\ Rango\ M = Rango\ M'=2<n \ \Rightarrow\ Compatible\ \ indeterminado}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Sean las rectas $r \equiv \frac{x-k}{1} = \frac{y+1}{2k-1} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv \frac{x}{k+1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{1}$. Estudiar su posición relativa, según los valores del parámetro k.

La expresión mediante ecuaciones implícitas de las rectas es:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 2k = z \\ 2y + 2 = (2k-1)z \end{cases} \;;\; \underline{r \equiv \begin{cases} 2x - z = 2k \\ 2y + (1-2k)z = -2 \end{cases}}$$

$$s \equiv \begin{cases} -x = ky - 2k + y - 2 \\ y - 2 = -z - 2 \end{cases} \;;\; \underline{s \equiv \begin{cases} x + (k+1)y = 2 + 2k \\ y + z = 0 \end{cases}}$$

El sistema que forman las rectas es: $\begin{cases} 2x - z = 2k \\ 2y + (1-2k)z = -2 \\ x + (k+1)y = 2 + 2k \\ y + z = 0 \end{cases}$

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1-2k \\ 1 & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;;\; M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2k \\ 0 & 2 & 1-2k & -2 \\ 1 & k+1 & 0 & 2+2k \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudiemos, en primer lugar el rango de M’:

$$Rango\ \ M' \Rightarrow \{C_2 : C_2 - C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 2k \\ 0 & 1+2k & 1-2k & -2 \\ 1 & k+1 & 0 & 2+2k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\ ;\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2k \\ 0 & 1+2k & -2 \\ 1 & k+1 & 2+2k \end{vmatrix} = 0$$

$$4(1+2k)(1+k) - 4 - 2k(1+2k) + 4(k+1) = 0\ \ ;;\ \ (k+1)(4+8k+4) - 4 - 2k - 4k^2 = 0\ \ ;;$$

$$8(k+1)^2 - 4k^2 - 2k - 2 = 0\ \ ;;\ \ 8(k^2+2k+1) - 4k^2 - 2k - 2 = 0\ \ ;;\ \ 4k^2 + 14k + 6 = 0\ \ ;;$$

$$2k^2 + 7k + 3 = 0\ \ ;;\ \ k = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-7 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \underline{k_1 = -\frac{1}{2}} \\ \underline{k_2 = -3} \end{cases}$$

$$Para \begin{cases} k \neq -\frac{1}{2} \\ k \neq -3 \end{cases} \Rightarrow\ Rango\ \ M' = 4$$

Para $k = -\frac{1}{2}$ resulta: $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Su rango es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \{L_1,\ L_2,\ L_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0 \\ \{L_1,\ L_2,\ L_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \underline{Para\ \ k = -\frac{1}{2} \Rightarrow\ Rango\ \ M = 2}$$

$$\underline{Para\ \ k \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} Rango\ \ M' = 4 \\ Rango\ \ M = 3 \end{cases}} \Rightarrow\ \underline{\underline{LAS\ \ RECTAS\ \ SE\ \ CRUZAN}}$$

$$\underline{Para\ \ k = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} Rango\ \ M' = 3 \\ Rango\ \ M = 2 \end{cases}} \Rightarrow\ \underline{\underline{LAS\ \ RECTAS\ \ SON\ \ PARALELAS}}$$

Para $k = -3$ resulta: $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Su rango es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 28 = 30 \neq 0 \Rightarrow \underline{Para \;\; k = -3 \Rightarrow Rango \;\; M = 3}$$

$$\underline{Para \;\; k = -3 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} Rango \;\; M' = 3 \\ Rango \;\; M = 3 \end{matrix} \right\}} \Rightarrow \underline{\underline{LAS \;\; RECTAS \;\; SON \;\; SECANTES}}$$

****

2º) Comprobar que se verifican las hipótesis del Teorema de Rolle para la función $f(x)=3\cos^2 x$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Calcular también el valor al cual se refiere la tesis del teorema.

El teorema de Rolle se puede enunciar diciendo:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) y si se cumple que f(a) = f(b), existe al menos un punto $c\in(a,\ b)$ tal que f'(x) = 0.

La función $f(x)=3\cos^2 x$ es continua y derivable en todo su dominio, que es R, por lo tanto, es aplicable el Teorema de Rolle en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Aplicando el Teorema:

$$f(x)=3\cos^2 x \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\cos^2\frac{\pi}{2}=3\cos\ 90^{o}=3\cdot 0=0 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=3\cos^2\frac{3\pi}{2}=3\cos\ 270^{o}=3\cdot 0=0 \end{cases}\right\} \quad \Rightarrow \quad \underline{f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$$

$$f'(x)=-6\cos\ x\cdot sen\ x=0 \ \Rightarrow \begin{cases} \cos\ x=0 \rightarrow x_1=\frac{\pi}{2}\ \ o\ \ x_1=\frac{3\pi}{2} \\ sen\ x=0 \rightarrow \underline{x_2=\pi} \end{cases}$$

<u>El único valor que satisface la tesis del Teorema es x = π.</u>

****

3º) Calcular el área de la región limitada por las curvas $y=\frac{x^2}{2}$ e $y=\frac{1}{x^2+1}$.

Los puntos de corte de ambas funciones son:

$$\frac{x^2}{2}=\frac{1}{x^2+1}\ ;;\ x^4+x^2=2\ ;;\ x^4+x^2-2=0\ \rightarrow\ x^2=a\ \rightarrow\ a^2+a-2=0$$

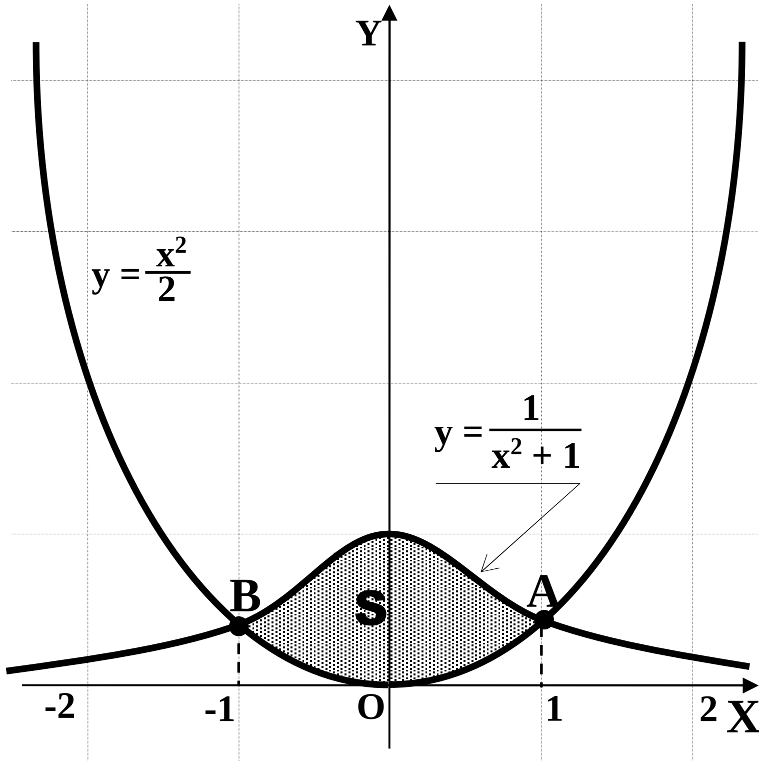
$$a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1\\ a_2=-2\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x^2=1\rightarrow\begin{cases}x_1=1\Rightarrow \underline{A\left(1,\ \frac{1}{2}\right)}\\ x_2=-1\Rightarrow \underline{B\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)}\end{cases}\\ x^2=-2\rightarrow x\notin R\end{cases}$$

Las dos curvas son pares, es decir, son simétricas con respecto al eje Y. Además tienen las siguientes características:

$y=\frac{x^2}{2}\ \Rightarrow$ Parábola cóncava $(\cup)$, que pasa por el origen y por los puntos A y B y también por los puntos C(2, 2) y D(-2, 2).

$y=\frac{1}{x^2+1}\ \Rightarrow$ Todas sus ordenadas son positivas; tiene un máximo en el punto P(0, 1) y tiene como asíntota al eje de abscisas.

La situación real es, aproximadamente, la que indica la figura:



$$S=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}\cdot dx-\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}\cdot dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}\cdot dx+\int_{1}^{-1}\frac{x^2}{2}\cdot dx=\left[arc\ tag\ x\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{-1}=$$

$$=\left[arc\ tag\ 1-arc\ tag\ (-1)\right]+\frac{-1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2\pi}{4}-\frac{2}{3}=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}=\frac{3\pi-4}{6}\cong$$

$$\cong \underline{\underline{0'904\ u^2=S}}$$

****

4º) Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0$.

Restando a cada columna la anterior queda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-b \\ (b+a)(b-a) & (c+b)(c-b) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+b \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)[(c+b)-(b+a)] =$$

$$(b-a)(c-b)(c+b-b-a) = (b-a)(c-b)(c-a) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = b = c}}$$

****